Universidad de Alcalá

# UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A ESTUDIOS UNIVERSITARIOS (**LOGSE**)

Universidad de Alcalá

Curso **2007-2008**
**MATERIA**: MATEMÁTICAS II

## INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
**Calificación total máxima:** 10 puntos.
**Tiempo:** Hora y media.

---

## OPCIÓN A

**Ejercicio 1. Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = e^{-x}(x^2+1)$$

se pide:
a) (2 puntos). Dibujar la gráfica de $f$, estudiando el crecimiento, decrecimiento, puntos de inflexión y asíntotas.
b) (1 punto). Calcular:

$$\int_0^1 f(x)\,dx$$

**Ejercicio 2. Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 2a & 0 & 1 \\ 2 & 0 & a+1 \end{pmatrix}$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Determinar el rango de A según los valores del parámetro $a$.
b) (1,5 puntos). Decir cuándo la matriz $A$ es invertible. Calcular la inversa para $a = 1$.

**Ejercicio 3. Calificación máxima:** 2 puntos.
Dados los puntos $P(1,1,3)$, $Q(0,1,0)$, se pide:
a) (1 punto). Hallar todos los puntos $R$ tales que la distancia entre $P$ y $R$ sea igual a la distancia entre $Q$ y $R$. Describir dicho conjunto de puntos.
b) (1 punto). Hallar todos los puntos $S$ contenidos en la recta que pasa por $P$ y $Q$ que verifican $\text{dist}(P,S) = 2\,\text{dist}(Q,S)$, donde "dist" significa distancia.

**Ejercicio 4. Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{3}, \qquad s \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{4},$$

hallar la ecuación de la recta $t$ perpendicular común a ambas.

OPCIÓN B

**Ejercicio 1. Calificación máxima:** 3 puntos.
a) (1,5 puntos). Calcular:

$$\int x^3 \ln(x)\, dx$$

donde $\ln(x)$ es el logaritmo neperiano de $x$.

b) (1,5 puntos). Utilizar el cambio de variable

$$x = e^t - e^{-t}$$

para calcular:

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+x^2}}\, dx$$

*Indicación:* Para deshacer el cambio de variable utilizar:

$$t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2}\right)$$

**Ejercicio 2. Calificación máxima:** 3 puntos.
Dados el plano:

$$\pi_1 \equiv x + y + z = 1$$

y la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-4}$$

se pide:
a) (1 punto). Hallar el punto $P$ determinado por la intersección de $r$ con $\pi_1$.
b) (2 puntos). Hallar un plano $\pi_2$ paralelo a $\pi_1$ y tal que el segmento de la recta $r$ comprendido entre los planos $\pi_1$, $\pi_2$ tenga longitud $\sqrt{29}$ unidades.

**Ejercicio 3. Calificación máxima:** 2 puntos.
Resolver el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{rrrrcr} x & -2y & +z & -3v & = & -4 \\ x & +2y & +z & +3v & = & 4 \\ 2x & -4y & +2z & -6v & = & -8 \\ 2x & & +2z & & = & 0 \end{array}\right.$$

**Ejercicio 4. Calificación máxima:** 2 puntos.
El cajero automático de una determinada entidad bancaria sólo admite billetes de 50, de 20 y de 10 euros. Los viernes depositan en el cajero 225 billetes por un importe total de 7000 euros. Averiguar el número de billetes de cada valor depositado, sabiendo que la suma del número de billetes de 50 y de 10 euros es el doble que el número de billetes de 20 euros.