INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas.
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la matriz:

$$M = \begin{pmatrix} m & 1 & 2m \\ m & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

se pide:
a) (1,25 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M es invertible.
b) (0,5 puntos). Determinar los valores del parámetro m para los cuales la matriz M^{25} es invertible.
c) (1,25 puntos). Para $m=-1$ calcular, si es posible, la matriz inversa M^{-1} de M.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+ax)-bx}{x^2} & \text{si} \quad 1+ax>0 \quad \text{y} \quad x \neq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x=0 \end{cases}$$

se pide:
a) (1,5 puntos). Hallar los valores de los parámetros a, b para los cuales la función f es continua en $x=0$.
b) (1,5 puntos). Para $a=b=1$, estudiar si la función f es derivable en $x=0$ aplicando la definición de derivada.

Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.
Dadas las rectas:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{a}, \qquad s \equiv \frac{x-3}{b} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-1},$$

determinar los valores de los parámetros a, b para los cuales las rectas r, s se cortan perpendicularmente.

Ejercicio 4. Calificación máxima: 2 puntos.
Dado el plano $\pi \equiv 2x-y+2z+1=0$ hallar las ecuaciones de los planos paralelos a π que se encuentran a 3 unidades de π.

OPCIÓN B

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
a) (1 punto). Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \quad ,$$

hallar el punto o los puntos de la gráfica de $f(x)$ en los que la pendiente de la recta tangente sea 1.
b) (0,5 puntos). Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto $x = 0$.
c) (1,5 puntos). Sea g una función derivable con derivada continua en toda la recta real, y tal que $g(0) = 0$, $g(2) = 2$. Demostrar que existe al menos un punto c en el intervalo $(0, 2)$ tal que $g'(c) = 1$.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la recta:

$$r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$$

y el plano $\pi \equiv x + y - 2z + 1 = 0$, hallar la ecuación de la recta s simétrica de la recta r respecto del plano π.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dado el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} \lambda x & +2y & +z & = & 0 \\ \lambda x & -y & +2z & = & 0 \\ x & -\lambda y & +2z & = & 0 \end{array} \right. ,$$

se pide:
a) (1 punto). Obtener los valores del parámetro λ para los cuales el sistema tiene soluciones distintas de:

$$x = y = z = 0 \, .$$

b) (1 punto). Resolver el sistema para $\lambda = 5$.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dadas las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \, ,$$

obtener una matriz cuadrada X de orden 2 que verifique la ecuación matricial $AXB = A + B$.