UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID
PRUEBA DE ACCESO A LAS ENSEÑANZAS UNIVERSITARIAS
OFICIALES DE GRADO
Curso **2012-2013**
MATERIA: MATEMÁTICAS II

INSTRUCCIONES GENERALES Y VALORACIÓN

El alumno contestará a los cuatro ejercicios de una de las dos opciones (A o B) que se le ofrecen. Nunca deberá contestar a unos ejercicios de una opción y a otros ejercicios de la otra opción. En cualquier caso, la calificación se hará sobre lo respondido a una de las dos opciones. No se permite el uso de calculadoras gráficas. **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.**
Calificación total máxima: 10 puntos.
Tiempo: Hora y media.

OPCIÓN A

Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dada la función:

$$f(x) = \frac{4}{x-4} + \frac{27}{2x+2}$$

se pide:

a) (0,75 puntos) Hallar las asíntotas de su gráfica.
b) (1,75 puntos) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular sus puntos de inflexión.
c) (0,5 puntos) Esbozar la gráfica de la función.

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 3 puntos.
Dadas la matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & a \\ a & 1 & 1 & a \\ a & a & 1 & 1 \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}, \qquad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

se pide:

a) (1,5 puntos) Calcular el determinante de A. Determinar el rango de A según los valores de a.
b) (0,5 puntos) Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ en el caso $a = 1$.
c) (1 punto) Resolver el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $a = -1$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dados los puntos $A(2,-2,1)$, $B(0,1,-2)$, $C(-2,0,-4)$, $D(2,-6,2)$, se pide:

a) (1 punto) Probar que el cuatrilátero $ABCD$ es un trapecio (tiene dos lados paralelos) y hallar la distancia entre los dos lados paralelos.
b) (1 punto) Hallar el área del triángulo ABC.

Ejercicio 4. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dados el punto $P(1,2,-1)$ y el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z + 2 = 0$, sea S la esfera que es tangente al plano π en un punto P' de modo que el segmento PP' es uno de sus diámetros. Se pide:

a) (1 punto) Hallar el punto de tangencia P'.
b) (1 punto) Hallar la ecuación de S.

OPCIÓN B

Ejercicio 1 . Calificación máxima: 3 puntos.

Sean r_A la recta con vector dirección $(1, \lambda, 2)$ que pasa por el punto $A(1, 2, 1)$, r_B la recta con vector dirección $(1, 1, 1)$ que pasa por $B(1, -2, 3)$, y r_C la recta con vector dirección $(1, 1, -2)$ que pasa por $C(4, 1, -3)$. Se pide:

a) (1 punto) Hallar λ para que las rectas r_A y r_B se corten.

b) (1,5 puntos) Hallar λ para que la recta r_A sea paralela al plano definido por r_B y r_C.

c) (0,5 puntos) Hallar el ángulo que forman r_B y r_C.

Ejercicio 2 . Calificación máxima: 3 puntos.

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & + & \lambda y & + & \lambda z & = & 1-\lambda\,, \\ x & + & y & + & (\lambda-1)z & = & -2\lambda\,, \\ (\lambda-1)x & + & y & + & z & = & \lambda-1\,, \end{array}\right.$$

se pide:

a) (2 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro λ.

b) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $\lambda = 1$.

c) (0,5 puntos) Resolverlo en el caso $\lambda = -1$.

Ejercicio 3 . Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, se pide:

a) (1 punto) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en $x = 0$.

b) (1 punto) Calcular $\displaystyle\int_0^1 x\, f(x)\, dx$.

Ejercicio 4 . Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la función $f(x) = e^{1/x}$, se pide:

a) (1 punto) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y estudiar la existencia de $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

b) (1 punto) Esbozar la gráfica $y = f(x)$ determinando los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus asíntotas.